Многомерный комплексный анализ 23.09.2011

1. Рассмотрим уравнение $w^3 + zw + 2z + 4 = 0$ в $\mathbb{C}^2$ и обозначим через X соответствующую компактную риманову поверхность в $\mathbb{P}^2 \supset \mathbb{C}^2$. Обозначим через $f : X \to \mathbb{P}$ сужение на X проекции $\mathbb{P}^2 \setminus \{0, 0, 1\} \to \mathbb{P}$, заданной в однородных координатах следующим образом: $(Z_0, Z_1, Z_2) \mapsto (Z_0, Z_1)$. Найти все точки $y \in \mathbb{P}$, для которых $f^{-1}(y)$ содержит менее трех точек и вычислить кратность f в каждом из этих прообразов.

2. Рассмотрим отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^2$, определенное как $t \mapsto (2t + t^2, 1 + t^5)$. Является ли образ $\mathbb{C}$ относительно данного отображения гладким подмногообразием в $\mathbb{C}^2$? Обозначим этот образ через X. Найти полином $P(z, w)$, такой, что $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$.

3. Вычислить постоянные λ_j, для которых семейство функций $\{\lambda_j z^j\}_{j=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом гильбертова пространства $L^2(\mathbb{D}, \mathcal{O})$ голоморфных функций, квадрат модулей которых интегрируем на единичном круге $\mathbb{D}$. Вычислить ядро Бергмана $K(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^2 z^j \bar{\zeta}^j$ и показать, что ортогональная проекция $L^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D}, \mathcal{O})$ может быть задана при помощи формулы $f \mapsto \int\limits_{\mathbb{D}} f(\zeta) K(z, \zeta)\, d\xi\, d\eta$, где $\zeta = \xi + i\eta$.